



УДК 624.01

doi: 10.48612/dnitii/2025_57_5-17

ВЕРИФИКАЦИЯ КОМПЬЮТЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ НА ОСНОВАНИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ И УГЛА ПОВОРОТА СЕЧЕНИЯ ОТ ДЕЙСТВИЯ КРУЧЕНИЯ

М. В. Мозголов**В. В. Костюков****В. В. Сорока**

Коломенский институт (филиал) федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский политехнический университет», г. Коломна

Аннотация

Современные требования российского градостроительного законодательства для отдельных объектов строительства обязывают проектировщиков выполнять проекты в виде цифровой информационной модели, которая включает в себя расчеты несущих строительных конструкций в программных комплексах, основанных на методе конечных элементов. Полнота и точность решений данного метода расчета зависят от типа конечных элементов, их формы, плотности сетки конечно-элементного разбиения, расположения элементов по отношению к потокам усилий. Для доказательства правильности найденного решения, необходимо выполнять верификацию и валидацию компьютерных моделей, проводить инженерный анализ полученных данных. Сложное напряженно-деформированное состояние в конструкциях возникает от совместного действия продольной силы, изгибающих моментов, поперечных сил, крутящего момента.

В работе изучается сходимость решений от действия кручения четырех моделей бетонной консольной балки, созданных на основании схем, представленных в пособии к ВК SCAD++ и одной «эталонной» модели. Сравниваются максимальные касательные напряжения, возникающие на гранях конструкции и угол поворота поперечного сечения. Расчет выполнен на основании законов линейной строительной механики.

Распределение касательных напряжений от действия кручения в сечениях твердотельных компьютерных моделей № 1 – 4 не соответствует теоретическим значениям, вычисленным по правилам сопротивления материалов.

Угол поворота поперечного сечения в моделях № 1 – 4 занижен, ошибка составляет: -10,6%; -15,7%; -8,9%; -7,8%, что характерно методу конечных элементов в перемещениях.

«Эталонная» модель, состоящая из кубических конечных элементов второго порядка с густой сеткой конечно-элементного разбиения, равной 1/16 характерного размера сечения конструкции, при определении касательных напряжений и угла поворота поперечного сечения показывает отличия от результатов твердотельных моделей № 1 – 4.

Ключевые слова

Конечно-элементная модель, объемные конечные элементы, сходимость результата, верификация, инженерный анализ данных, кручение, касательные напряжения, угол поворота сечения.

Дата поступления в редакцию

20.11.2025

Дата принятия к печати

29.11.2025

тельных напряжений и угла поворота поперечного сечения от действия кручения имеет полное совпадение с известным аналитическим методом расчета.

Введение

На современном этапе проектной деятельности проектирование отдельных объектов капитального строительства должно выполняться в виде цифровой информационной модели (BIM). Данный подход предусматривает расчеты несущих конструкций на компьютерах в программных комплексах, основанных на методе конечных элементов (МКЭ) [1 – 4]. Полнота и точность решений данного метода расчета зависят от типа конечных элементов, используемых в расчетной модели, от плотности сетки конечно-элементного разбиения, от формы конечных элементов и их расположения по отношению к потокам усилий, от идеализации расчетной схемы действительного сооружения и др. [5 – 9]. Например, при проектировании конькобежного стадиона в г. Коломне моделирование коробчатой сталежелезобетонной балки опорного контура мембранных покрытия размером в плане по осям контура $199,374 \times 110,818$ м осуществлялось одномерными (балочными), двумерными (плоскими) и трехмерными (объемными) конечно-элементами [10, с. 15]. Отмечается, что наименьшая погрешность расчетов по напряжениям получалась в модели, состоящей из балочных конечно-элементов. Однако, такая модель является номинальной. Для выполнения конструктивного и локального расчетов с целью учета различных особенностей конструкции конечно-элементную модель следует составлять из стержневых, плоских, объемных, специальных конечно-элементов, их комбинаций [7]. Для доказательства правильности найденного решения, необходимо выполнять верификацию и валидацию компьютерных моделей, проводить инженерный анализ полученных данных [11].

Цель работы

При создании расчетных моделей строительных систем, с целью правильного выбора конечно-элементов, необходимо ориентироваться на рекомендации, представленные в литературе по МКЭ. Этими вопросами занимались многие исследователи, однако общего ответа, подходящего ко всем случаям, не существует [1, с. 354]. В литературе, посвященной методу конечно-элементов, представлены данные о сходимости решений по перемещениям, изгибающим моментам и поперечным силам [1 – 9]. При этом, точность определения поперечных сил значительно ниже определения изгибающих моментов. В ответственных случаях полученный результат рекомендуется контролировать известными аналитическими способами расчета [12, с. 17].

Сложное напряженно-деформированное состояние (НДС) в конструкциях возникает от совместного действия нескольких усилий: продольной силы, изгибающих моментов и поперечных сил, действующих в двух направлениях, крутящего момента. В этом случае, суммарная сходимость решения МКЭ будет зависеть от сходимости отдельных составляющих НДС конструкции. Верификацию моделей по кручению можно выполнить, сравнивая касательные напряжения, угол поворота поперечного сечения и относительный угол закручивания.

В чистом виде в железобетонных конструкциях кручение практически не встречается, как правило, оно сочетается с изгибом [13 – 16]. По причине сложности определения крутящих моментов в пространственных конструкциях аналитическим методом расчета, кручение либо игнорируются, либо учитывается упрощенно. В обычных плоских плитах, опертых по контуру и закрепленных от подъема углах, крутящие моменты уменьшают пролетные изгибающие моменты. При наличии арма-

туры, воспринимающей кручение, это было учтено в германских технических условиях для железобетонных сооружений в 1925 г. путем умножения изгибающих пролетных моментов на поправочные коэффициенты, предложенные Маркусом [13, с. 645]. В советской научно-технической литературе от 1950 – 1991 гг. разгружающее действие кручения в железобетонных плитах перекрытий, опертых по контуру с закрепленными от подъема углами, рассчитываемых на равномерно-распределенную нагрузку, также предлагалось учитывать. С этой целью были разработаны таблицы для шести случаев граничных условий [14 – 16]. Если углы косого железобетонного кессонного перекрытия с наличием опорной балки приподнимаются, в конструкции происходит более чем трехкратное увеличение напряжений и существенно возрастают прогибы. Данный эффект был выявлен при помощи линейного расчета структурной компьютерной модели, созданной в программном комплексе SolidWorks [17, с. 218].

Кручение возникает в балках ребристых перекрытий [6]. Оно оказывает разгружающее действие, уменьшает прогибы и пролетные изгибающие моменты в многопролетных плитах, а также второстепенных балках. В аналитических расчетах это учитывается приложением полной временной нагрузки в нечетных (четных) пролетах и, соответственно, фиктивной уменьшенной временной нагрузки в четных (нечетных) пролетах [14 – 16]. О значительном разгружающем эффекте от действия кручения, возникающем в балке опорного контура кессонных перекрытий отмечается в работах [18, 19]. В мощном опорном контуре, шарнирно опирающемся на сплошную конструкцию, например на кирпичную стену, возникают существенные крутящие моменты. В данном случае, кручение является одним из главных факторов в напряженно-деформированном состоянии несущей строительной системы. Кручение опорного контура – это следствие его жесткого соединения с пролетными балками. В пролетных балках в месте соединения с балкой опорного контура возникает опорный изгибающий момент, уменьшающий пролетный момент. Крутящий момент присутствует во всех балках прямой кессонной конструкции с максимальным значением в балках опорного контура. По мере приближения к середине пролета кручение уменьшается. Сложное напряженно-деформированное состояние с наличием кручения свойственно опорным кольцам пространственных систем многопролетных зданий [10, 20]. Гвоздев А. А. и другие исследователи отмечали, что повысить несущую способность железобетонных плит, опертых по контуру, можно при помощи усиления опорных зон окаймляющими балками [21, с. 39], работающими на кручение. Кручение может возникнуть в подкрановых балках при смещении нагрузки относительно оси конструкции.

Сопротивление железобетонных конструкций кручению, по сравнению с изгибом, значительно ниже [13 – 16]. Появление косых трещин приводит к существенному снижению жесткости железобетонного элемента, снижает сопротивление поперечной силе, уменьшает поддерживающее влияние кручения. При достижении напряжений в спиральной арматуре текучести, кручение перестает восприниматься [13]. За изменением жесткости железобетонной конструкции последует перераспределение усилий в ней. Таким образом, достоверное определение изгибающих, крутящих моментов, по-перечных и продольных сил в несущих железобетонных конструкциях при помощи метода конечных элементов является важным и не всегда может иметь сходимость с правильным результатом, а как следствие, приводить к авариям зданий и сооружений [9].

Материалы и методы

Данный численный эксперимент является продолжением работ [8,9] по изучению сходимости решений конечно-элементных моделей консольной балки, созданных в вычислительном комплексе SCAD. Модели № 1 – 4 полностью идентичны ранее рассмотренным, отличие заключается в нагрузке. Длина консоли 2,5 м, поперечное сечение $0,5 \times 0,5$ м, класс бетона В 15, начальный модуль упруго-

сти бетона всех конечных элементов уменьшен на коэффициент редуцирования 0,2. Сосредоточенная нагрузка $F=100$ Т прикладывается в торце балок к 4-м узлам (*рисунок 1*). Для стержней сплошного квадратного поперечного сечения опорное сечение, остающееся плоским при деформации конструкции, оказывает незначительное влияние на угол закручивания. В заделке возникает крутящий момент, направленный в противоположном направлении нагрузке с целью обеспечения равновесия конструкции. Таким образом, в нашем случае по всей длине балки действует чистое кручение $M_{kp}=100$ Тм.

Изучается сходимость касательных напряжений, действующих на гранях балки и угол поворота поперечного сечения, расположенного на расстоянии 2,0 м от опоры. Причиной выбора данного места для исследования является стабильность изучаемых параметров вследствие отсутствия влияния локальных напряжений, действующих на основании принципа Сен-Венана [5].

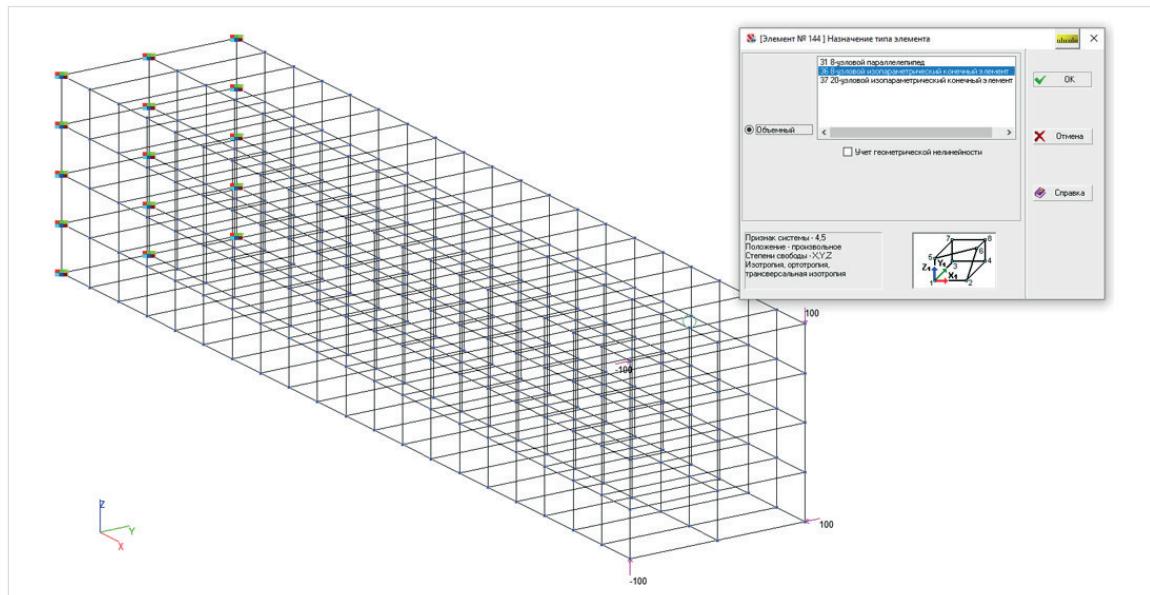


Рис. 1. Модель № 1. Расчетная схема

Результаты и обсуждение

Поля касательных напряжений τ_{xy} , τ_{xz} и суммарные перемещения узлов моделей представлены на *рисунках 2–13*.

С целью изучения полученных данных МКЭ вычислим максимальные касательные напряжения τ_{max} по правилам сопротивления материалов, действующие на гранях балки в середине ее сторон [22]. Расчет ведем в упругой постановке задачи, на основании законов линейной строительной механики, не всемогущей, но наиболее употребительной [3, 5]. Учет физической нелинейности материала осложняет прочностной анализ, приводит к трудностям вычислительного характера и понимания полученных результатов. Начинать расчет всего сооружения целиком рекомендуется в линейной постановке задачи и в случае необходимости, выполнять дальнейшие уточнения при помощи нелинейных расчетов [23]. Для прямоугольного сечения максимальные касательные напряжения от действия кручения вычисляются по формуле:

$$\tau_{max} = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \left(3 + \frac{2,6}{0,45 + \frac{h}{b}} \right) \cdot \frac{M_{kp}}{h \cdot b^2}, \quad (1)$$

где: h — высота балки, b — ширина балки, M_{kp} — крутящий момент.

$$\tau_{max} = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \left(3 + \frac{2,6}{0,45 + \frac{0,5}{0,5}} \right) \cdot \frac{100}{0,5 \cdot 0,5^2} = 3834 [\text{T/m}^2]. \quad (2)$$

Угол поворота поперечного сечения, расположенного на расстоянии $l=2,0$ м от опоры, вычисляется по формуле:

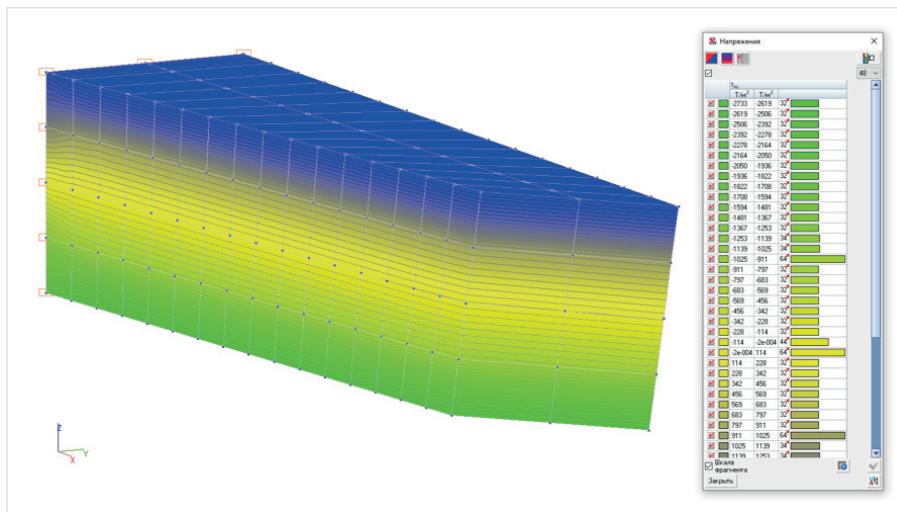
$$\varphi = \frac{M_{kp} \cdot l}{G \cdot \beta \cdot b^3 \cdot h} = \frac{100 \cdot 2,0}{195833 \cdot 0,141 \cdot 0,5^3 \cdot 0,5} = 0,11588974 [\text{рад.}], \quad (3)$$

где: β — табличный коэффициент, зависящий от отношения сторон балки.

$$\varphi^0 = \frac{180 \cdot \varphi}{\pi} = \frac{180 \cdot 0,11588974}{3,14} = 6,63999 (6^{\circ}38'24'). \quad (4)$$

Модуль упругости второго рода:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1+\mu)} = \frac{470000}{2 \cdot (1+0,2)} = 195833 [\text{T/m}^2]. \quad (5)$$



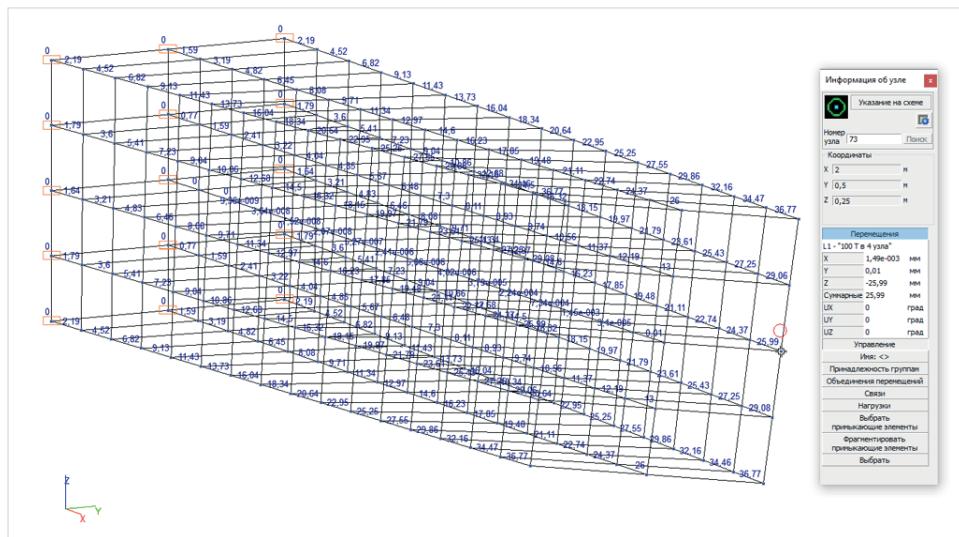


Рис. 4. Деформированная модель № 1. Суммарные перемещения узлов, мм

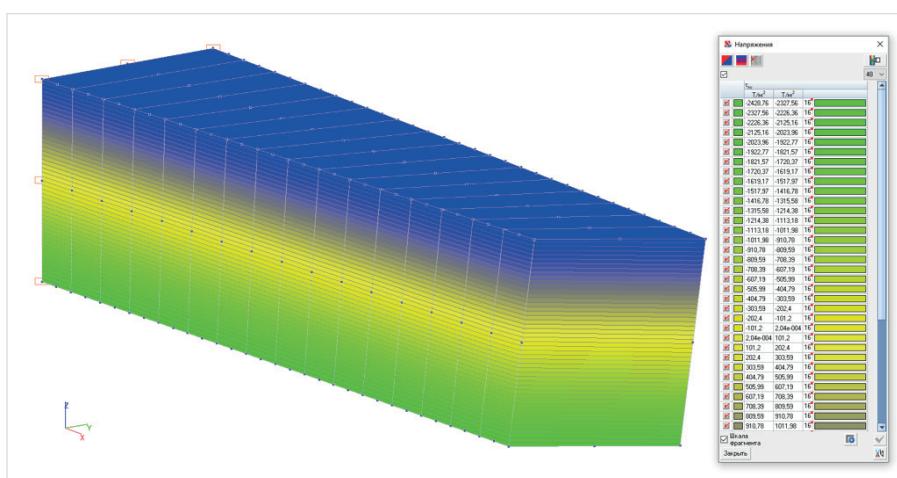


Рис. 5. Деформированная модель № 2. Напряжения τ_{xy} , [Т/м²]

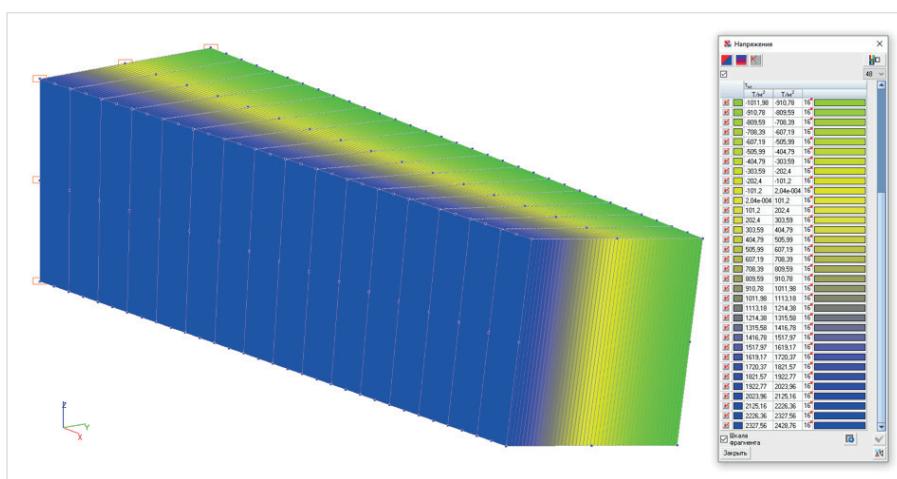


Рис. 6. Деформированная модель № 2. Напряжения τ_{xz} , [Т/м²]

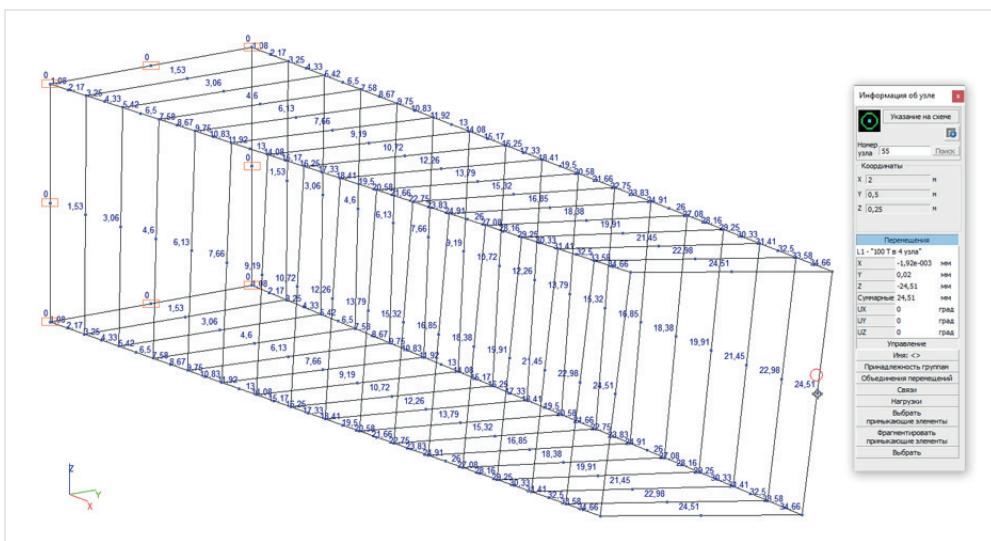


Рис. 7. Деформированная модель № 2. Суммарные перемещения узлов, мм

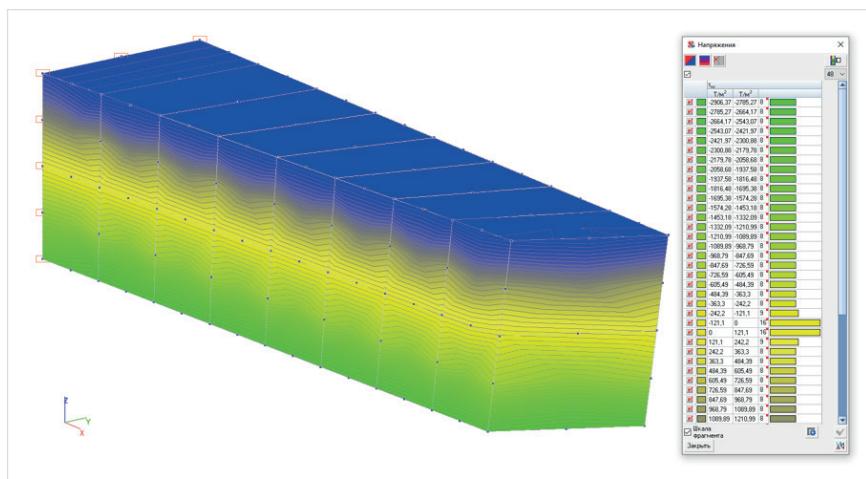


Рис. 8. Деформированная модель № 3. Напряжения τ_{xy} , [T/m^2]

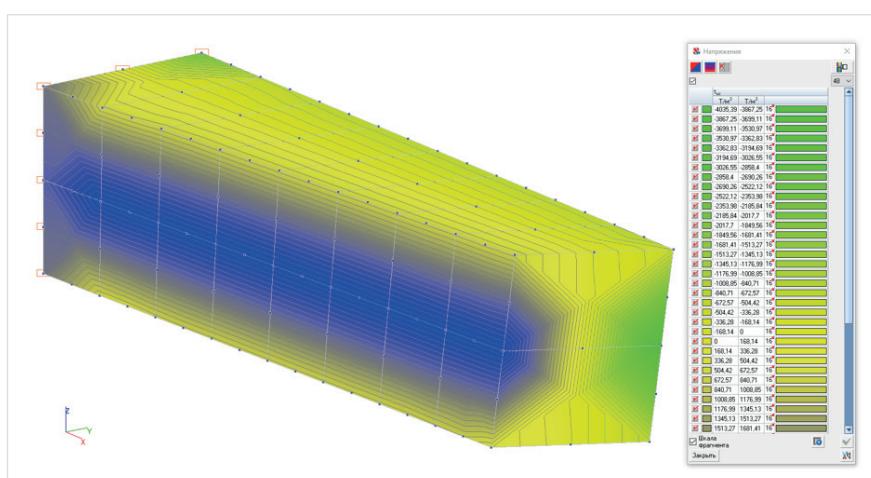


Рис. 9. Деформированная модель № 3. Напряжения τ_{xz} , [T/m^2]

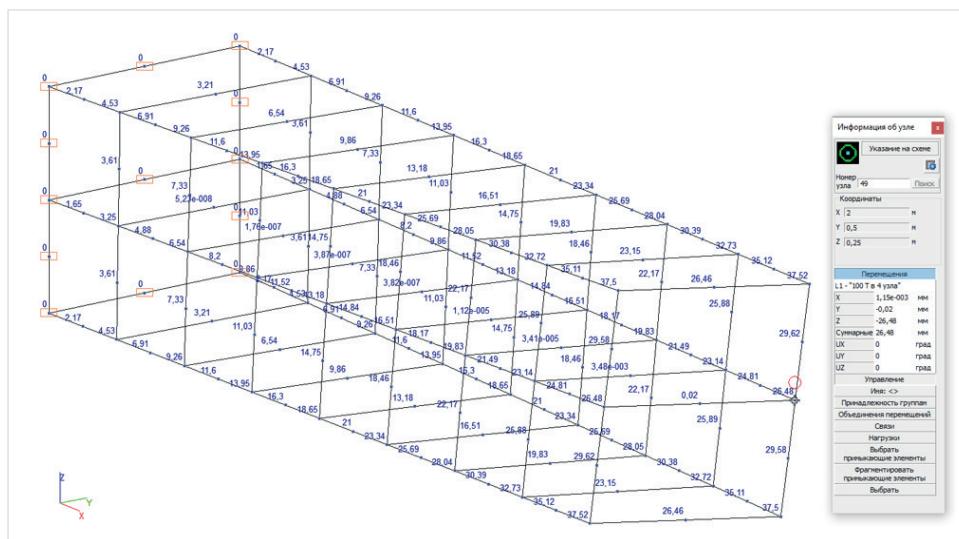


Рис. 10. Деформированная модель № 3. Суммарные перемещения узлов, мм

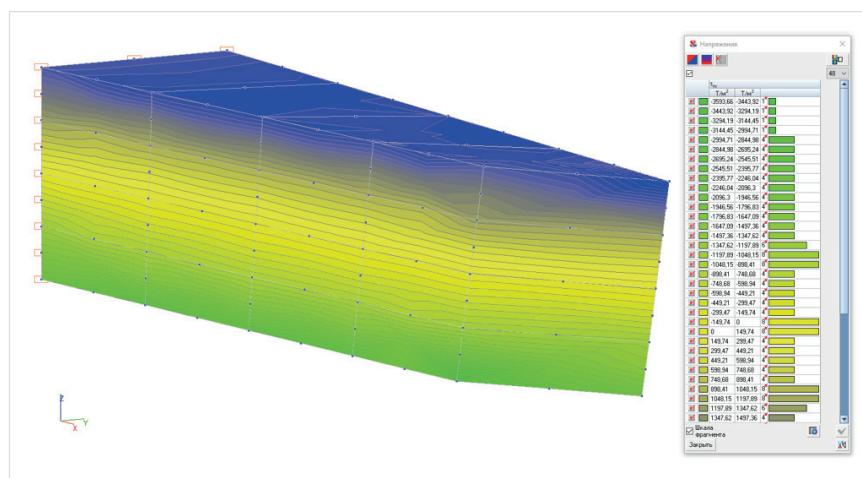


Рис. 11. Деформированная модель № 4. Напряжения τ_{xy} , [Т/м²]

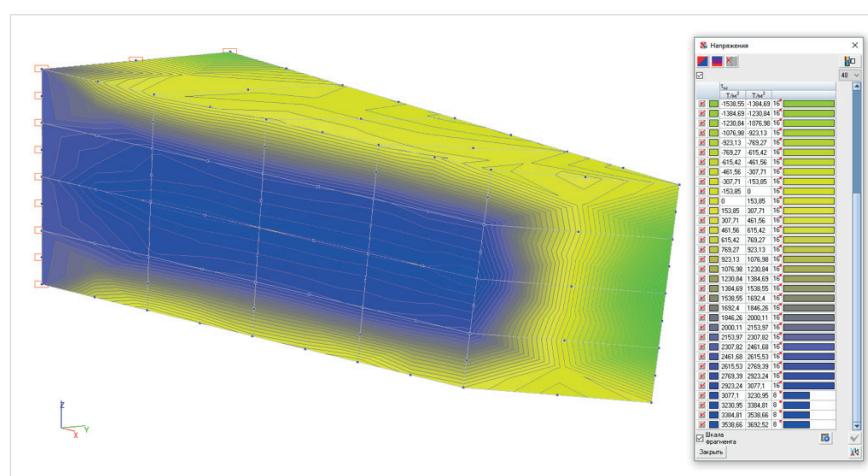


Рис. 12. Деформированная модель № 4. Напряжения τ_{xz} , [Т/м²]

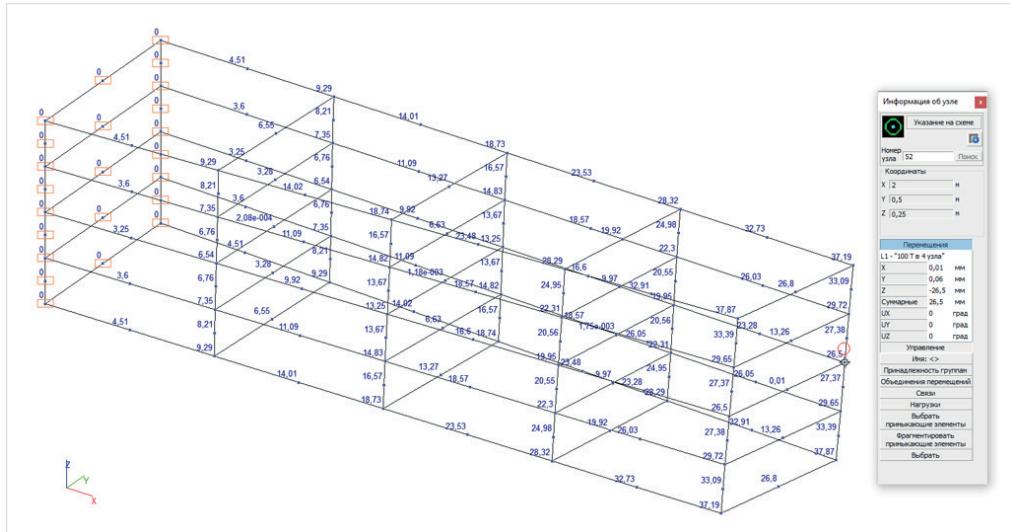


Рис. 13. Деформированная модель № 4. Суммарные перемещения узлов, мм

Изучив касательные напряжения τ_{xy} и τ_{xz} , действующие в сечениях компьютерных моделей № 1 – 4, можно сделать вывод, что их распределение не соответствует теоретическим значениям, вычисленным по правилам сопротивления материалов. Создадим «эталонную» конечно-элементную модель [9]. Она будет состоять из густой сетки конечных элементов второго порядка кубической формы с размером стороны, равным 1/16 характерного размера поперечного сечения конструкции $500/16 = 31,25$ мм (тип КЭ 37 библиотеки BK SCAD++) [4]. Поля касательных напряжений τ_{xy} и τ_{xz} в «эталонной» модели представлены на рисунках 14, 15. Анализ данных свидетельствует о правильном распределении напряжений по сечениям конструкции.

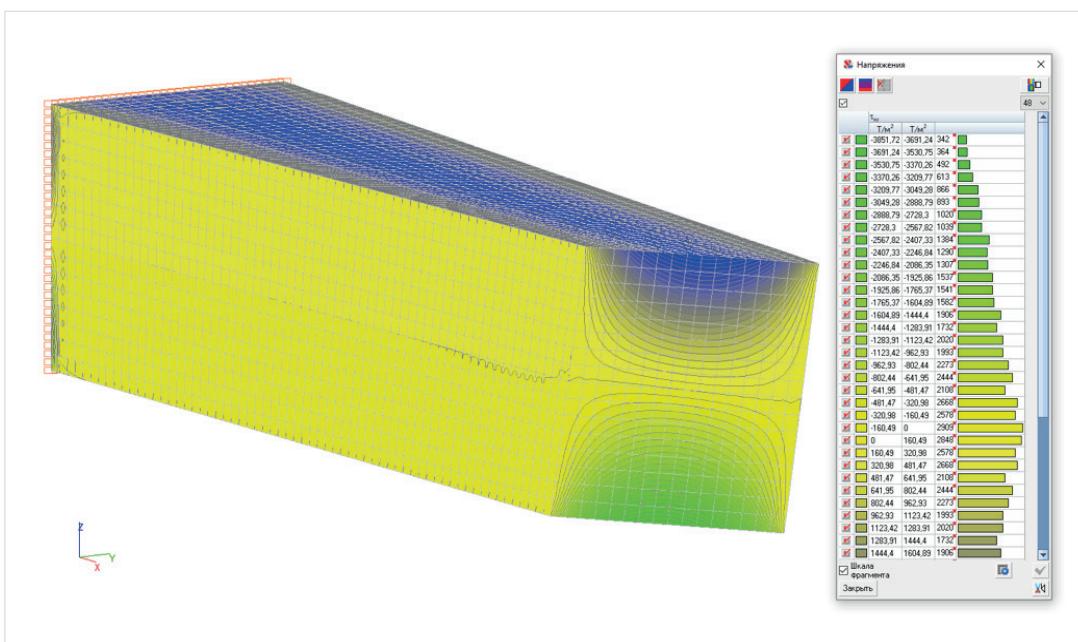


Рис. 14. «Эталонная» деформированная модель. Напряжения τ_{xy} , [T/m^2]

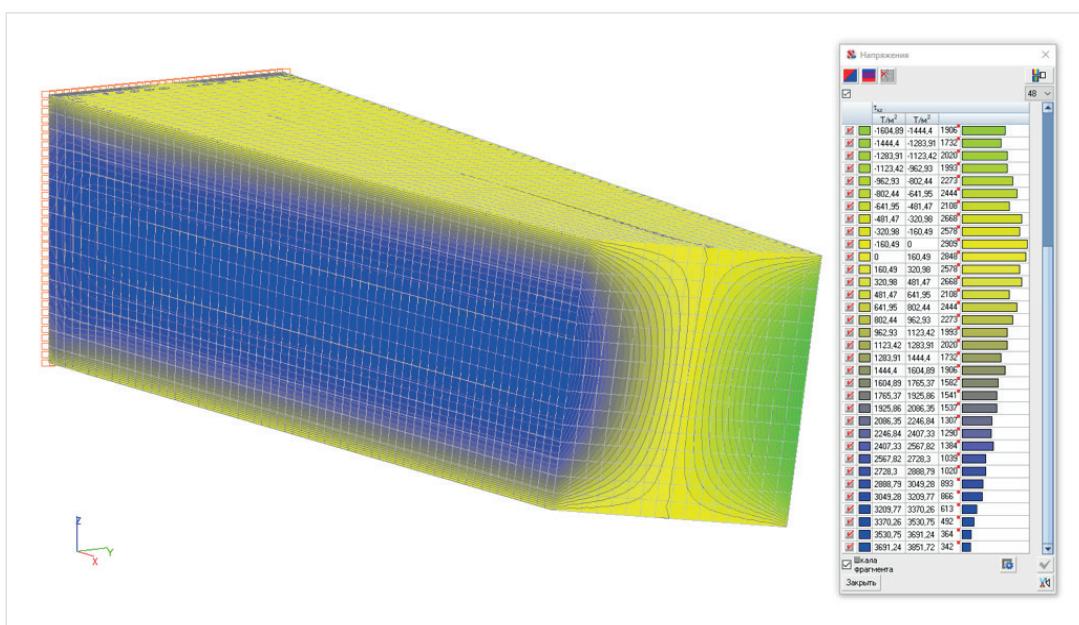


Рис. 15. «Эталонная» деформированная модель. Напряжения τ_{xz} , [Т/м²]

Данные численного эксперимента изучения касательных напряжений и угла поворота поперечного сечения балки от действия кручения представлены в *таблице 1*. Касательные напряжения вычислялись на гранях балки в середине ее сторон с учетом их усреднения по звезде элементов узла [3, 7].

Таблица 1

Максимальные касательные напряжения и угол поворота сечения, расположенного на расстоянии 2,0 м от опоры балки

Характеристика	Модель № 1	Модель № 2	Модель № 3	Модель № 4	«Эталонная» модель
Напряжения τ_{xy} , [Т/м ²]	2716,5	2400,1	2860,5	2648,4	3851,7
Сравнение с теоретическим значением, %	70,9	62,6	74,6	69,1	100,5
Напряжения τ_{xz} , [Т/м ²]	3194,3	2400,1	4016,8	3692,5	3851,7
Сравнение с теоретическим значением, %	83,3	62,6	104,8	96,3	100,5
Угол поворота сечения φ , (градусы)	5,9374 (5°56'14")	5,59938 (5°35'57")	6,046225 (6°02'46")	6,11874 (6°07'07")	6,60543 (6°36'19")
Сравнение с теоретическим значением, %	89,4	84,3	91,1	92,2	99,5

Проведенный численный эксперимент подтвердил рекомендации специалистов по методу конечных элементов: чтобы добиться сходимости результатов МКЭ, при создании моделей необходимо

димо уменьшать размеры конечных элементов и повышать степень аппроксимирующих полиномов [1]. Следует заметить, что данный вывод не является универсальным, например, при выполнении нелинейных расчетов железобетонных конструкций с увеличением числа конечных элементов начиная с определенной итерации численное решение может расходиться [23, с. 113].

Выводы

1. Распределение касательных напряжений от действия кручения в сечениях твердотельных компьютерных моделей № 1 – 4 консольной балки не соответствует теоретическим значениям, вычисленным по правилам сопротивления материалов. По сравнению с известным аналитическим методом расчета угол поворота поперечного сечения в моделях № 1 – 4 занижен. Ошибка составляет: -10,6%; -15,7%; -8,9%; -7,8%, что характерно методу конечных элементов в перемещениях.
2. При линейном расчете твердотельная конечно-элементная модель, созданная из кубических конечных элементов второго порядка с густой сеткой конечно-элементного разбиения, при определении касательных напряжений и угла поворота поперечного сечения от действия кручения показала полное совпадение полученных данных с известным аналитическим методом расчета.
3. При проектировании строительных конструкций с целью исключения возможной ошибки, инженерный анализ данных, полученных на ЭВМ при помощи метода конечных элементов, является одним из важных этапов проектной деятельности.

Библиографический список

1. Секулович М. Перевод с сербского Ю. Н. Зуева. Под редакцией В. Ш. Барбакадзе. Метод конечных элементов. Москва: Стройиздат, 1993. 664 с.
2. Каплун А. Б., Морозов Е. М., Олферъева М. А. ANSYS в руках инженера. Практическое руководство. Москва: УРСС, 2003. 272 с.
3. Перельмутер А. В., Сливкер В. И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. Москва: ДМК Пресс, 2007. 600 с.
4. Карпиловский В. С., Криксунов Э. З., Маляренко А. А., Фиалко С. Ю., Перельмутер А. В., Перельмутер М. А. SCAD Office. Версия 21. Вычислительный комплекс SCAD ++. Москва: «СКАД СОФТ», 2015. 848 с.
5. Перельмутер А. В. Беседы о строительной механике. Москва: SCAD Soft, ACB, 2016. 304 с.
6. Никитин К. Е., Кирсанов О. А. Сравнительное исследование конечно-элементных методик расчета ребристых железобетонных перекрытий // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2022. 18(3). С. 242 – 254. DOI 10.22363/1815-5235-2022-18-3-242-254.
7. Мозголов М. В., Костюков В. В. О сходимости решений моделей вычислительного комплекса SCAD из трехгранной призмы первого порядка. Часть 2. h-метод // Системные технологии. 2024. № 1 (50). С. 5 – 19. doi: 10.48612/dnitii/2024_50_5-19.
8. Мозголов М. В., Окольникова Г. Э. К вопросу оценки точности решений моделей метода конечных элементов на примере расчета консольной балки // Системные технологии. 2024. № 1 (50). С. 118 – 128. doi: 10.48612/dnitii/2024_50_181-128.

- 9.** Мозголов М. В., Окольникова Г. Э. Оценка выбора модели метода конечных элементов для расчета балок на основе распределения касательных напряжений // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2024. Т. 20. № 6. С. 539 – 551. doi: 10.22363/1815-5235-2024-20-6-539-551.
- 10.** Канчели Н. В., Батов П. А., Дробот Д. Ю. Реализованные мембранные оболочки. Расчет, проектирование и возведение. Москва: АСВ, 2009. 120 с.
- 11.** ГОСТ Р 57700.10-2018 Численное моделирование физических процессов. Определение напряженно-деформированного состояния. Верификация и валидация численных моделей сложных элементов в упругой области. Москва, Стандартинформ. 2018.
- 12.** Министерство строительства и жилищно-коммунального хозяйства Российской Федерации, Федеральное автономное учреждение «Федеральный центр нормирования, стандартизации и оценки соответствия в строительстве». Плоские безбалочные железобетонные перекрытия. Правила проектирования. Москва, 2017. 158 с.
- 13.** Залигер Р. Железобетон: его расчет и проектирование. Перевод с немецкого под ред. П. Я. Каменцева. Москва-Ленинград: ГНТИ, 1931. 671 с.
- 14.** Иванов-Дятлов И. Г. Железобетонные конструкции. М.-Л.: Министерство коммунального хозяйства РСФСР, 1950. 296 с.
- 15.** Карпухин Н. С. Железобетонные конструкции. М.: Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре, 1957. 442 с.
- 16.** Дыховичный Ю. А., Максименко В. А., Кондратьев А. Н., Крейтан В. Т., Сканави А. Н., Вайнштейн М. С. Жилые и общественные здания. Краткий справочник инженера-конструктора. М.: Стройиздат, 1991. 656 с.
- 17.** Алямовский А. А. Инженерные расчеты в SolidWorks Simulation. М.: ДМК Пресс, 2019. 464 с.
- 18.** Мозголов М. В., Козлова Е. В. О разгружающем действии крутящих моментов в балках железобетонных кессонных перекрытий // Градостроительство и архитектура. 2022. Т. 12, № 3. С. 11 – 20. DOI: 10.17673/Vestnik.2022.03.2.
- 19.** Мозголов М. В., Костюков В. В., Омелянчук Д. Г. О влиянии окаймляющей балки на напряженно-деформированное состояние косого кессонного железобетонного перекрытия // Системные технологии. 2024. № 4 (53). С. 32 – 42. doi: 10.48612/dnitii/2024_53_32-42.
- 20.** Мозголов М. В. О строительстве конькобежного стадиона в городе Коломне. Вестник Коломенского института (филиала) Московского политехнического университета. Сборник научных трудов. Москва, 2024. С. 353-378.
- 21.** Бушков В. А. Железобетонные конструкции. II часть. Стройиздат Наркомстроя, 1941. 503 с.
- 22.** Фесик С. П. Справочник по сопротивлению материалов. К.: Будівельник, 1970. 308 с.
- 23.** Фиалко С. Ю. Применение метода конечных элементов к анализу прочности и несущей способности тонкостенных железобетонных конструкций с учетом физической нелинейности. М.: Издательство СКАД СОФТ, Издательский дом АСВ, 2018. 192 с.

VERIFICATION OF COMPUTER MODELS BASED ON THE DISTRIBUTION OF SHEAR STRESSES AND THE ANGLE OF ROTATION OF THE SECTION DUE TO TORSION

M. V. Mozgolov

V. V. Kostyukov

V. V. Soroka

Kolomna Institute (branch) of the Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education "Moscow Polytechnic University", Kolomna

Abstract

Current Russian urban planning legislation for certain construction projects requires designers to develop projects in the form of a digital information model, which includes calculations of load-bearing building structures using software packages based on the finite element method. The completeness and accuracy of this calculation method's solutions depend on the type of finite elements, their shape, the density of the finite element mesh, and the arrangement of elements relative to stress flows. To prove the correctness of the resulting solution, it is necessary to verify and validate computer models and conduct an engineering analysis of the obtained data. Complex stress-strain states in structures arise from the combined action of longitudinal forces, bending moments, shear forces, and torsional moments.

This paper examines the convergence of torsional solutions for four concrete cantilever beam models created using the diagrams presented in the SCAD++ computer science manual and one "reference" model. The maximum shear stresses arising on the structure's faces and the angle of rotation of the cross-section are compared. The calculation was performed based on the laws of linear structural mechanics.

The distribution of torsional shear stresses in sections of computer models Nos. 1 – 4 does not correspond to theoretical values calculated using the strength of materials principles.

The cross-section rotation angle in computer models Nos. 1 – 4 is underestimated, with errors of –10.6%; –15.7%; –8.9%; and –7.8%, which is typical of the finite element method in displacements.

The "reference" model, consisting of second-order cubic finite elements with a dense finite element mesh equal to 1/16 of the characteristic cross-sectional dimension, fully matches the known analytical calculation method when determining the shear stresses and cross-section rotation angle due to torsion.

The Keywords

Finite element model, volumetric finite elements, result convergence, verification, engineering data analysis, torsion, shear stress, section rotation angle.

Date of receipt in edition

20.11.2025

Date of acceptance for printing

29.11.2025

Ссылка для цитирования:

М. В. Мозголов, В. В. Костюков, В. В. Сорока. Верификация компьютерных моделей на основании распределения касательных напряжений и угла поворота сечения от действия кручения. — Системные технологии. — 2025. — № 4 (57). — С. 5 – 17.