УДК 624.04



doi: 10.48612/dnitii/2023_49_100-108

ВЛИЯНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ СДВИГА НА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ПЛИТ

М. Ш. Гатиев */** Н. А. Аюбов * С. В. Клюев *** С. В. Литвинов ****

* Комплексный научно-исследовательский институт им. Х.И. Ибрагимова Российской Академии Наук, г. Грозный

** Ингушский государственный университет, г. Магас

*** Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова, г. Белгород

**** Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону

Аннотация

В статье приводится вывод основных уравнений для определения напряжённо-деформированного состояния железобетонных плит под действием равномерно распределённой нагрузки. Отличием от существующих подобных исследований является рассмотрение неравномерного распределения касательных напряжений по толщине плиты в отличие от наиболее распространённого варианта — равномерного распределения. Окончательно задача расчета толстой железобетонной плиты сводится к системе из двух дифференциальных уравнений. Приводятся результаты решения модельной задачи на основе уравнений вязкоупругой модели наследственного старения.

Ключевые слова

ползучесть бетона, касательные напряжения, плоское напряжённое состояние, железобетонные плиты, численные методы

Дата поступления в редакцию 12.10.2023 Дата принятия к печати 15.10.2023

Введение

Теория Кирхгофа-Лява, построенная на гипотезе прямых нормалей, хорошо описывает напряженно-деформированное состояние тонких пластин, у которых деформации сдвигов γ_{zx}, γ_{zy} существенно меньше углов поворота $\frac{\partial w}{\partial x}$ и $\frac{\partial w}{\partial y}$.

Существует достаточно много различных вариантов уточненных теорий толстых плит, отличающихся не только совокупностями принятых гипотез и учитываемых факторов, пренебрегаемых в классической теории, но и методами построения [1–4].

В динамике и в теории устойчивости широкое распространение получила уточненная теория, обобщающая теорию Тимошенко изгиба балок с учетом сдвига и позволяющая достаточно точно

BUILDING

вычислять интегральные характеристики пластины (критические нагрузки, частоты колебаний и др.) Однако в этой теории деформации сдвига, как и касательные напряжения τ_{zx} , τ_{zy} , принимаются постоянными по толщине пластины, что противоречит отсутствию касательных нагрузок на поверхности пластины в наиболее распространенном случае равномерно распределенной по площади нагрузки.

Поэтому при расчетах напряженно-деформированного состояния пластин чаще применяют уточненные теории, в которых γ_{zx} и γ_{zy} , а также τ_{zx} и τ_{zy} по толщине переменны. Сравнение с имеющимися точными решениями трехмерной теории упругости в работах [5–8] показало, что наименьшие погрешности дают уточненные теории, в которых принято параболическое изменение напряжений τ_{zx} , τ_{zy} по толщине пластины. К таким теориям, в частности, относится теория анизотропных пластин С. А. Амбарцумяна [9, 10], учитывающая также нормальные напряжения σ_z . При выводе разрешающих уравнений нами будут использоваться основные гипотезы, принятые в [9].

Постановка задачи

Вывод разрешающих уравнений.

Для касательных напряжений τ_{bzx} и τ_{bzy} по толщине пластины принимаем распределение по закону квадратичной параболы:

$$\tau_{bzx} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right); \tag{1}$$
$$\tau_{bzy} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right), \tag{1}$$

где $\varphi = \varphi(x, y) - \varphi$ ункция сдвигов.

Считаем, что арматура касательные напряжения τ_{zx} и τ_{zy} , а также нормальные напряжения σ_z не воспринимает, т. е:

$$\tau_{zx} = \tau_{bzx}, \qquad \tau_{zy} = \tau_{bzy}, \qquad \sigma_z = \sigma_{bz}.$$

Напряжения τ_{zx}, τ_{zy} и σ_{z} связаны уравнением равновесия:

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0.$$
(3)

Подставляя (1) в (3), получим:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\nabla^2 \varphi \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right). \tag{4}$$

Интегрирование уравнения (4) даст:

$$\sigma_z = -\nabla^2 \varphi \, \Phi(z) + C(x, y). \tag{5}$$

где $\Phi(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2}\right), C_{x,y}$ — произвольная функция интегрирования, определяемая из граничных условий:

при
$$z = -\frac{h}{2}$$
: $\sigma_z = -q(x, y)$;
при $z = \frac{h}{2}$: $\sigma_z = 0.$ (6)

Подставляя граничные условия в (5), получим:

$$\frac{h}{3}\nabla^2 \varphi = C(x, y);$$

$$-q(x, y) = \frac{h}{3}\nabla^2 \varphi + C(x, y).$$
(7)

Складывая первое и второе равенство в (7), найдем функцию $C_{\! x,y}\! :$

$$C(x,y) = -\frac{q(x,y)}{2}.$$
 (8)

Подставив (8) в первое уравнение (7), получим разрешающее уравнение для функции сдвигов:

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{3}{2} \frac{q(x, y)}{h}.$$
(9)

Выражение для $\sigma_{\!z}$ получим, подставив (9) и (8) в (5):

$$\sigma_z = -\frac{q}{2} \left(1 - \frac{3z}{h} + 4\frac{z^3}{h^3} \right). \tag{10}$$

Соотношения Коши для деформаций сдвига имеют вид:

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x};$$

$$\gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}.$$
(11)

С физической точки зрения деформации γ_{zx} и γ_{zy} представляют сумму упругих деформаций и деформаций ползучести:

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} + \gamma_{zx}^*;$$

$$\gamma_{zy} = \frac{\tau_{zy}}{G} + \gamma_{zy}^*,$$
(12)

где *G* — модуль сдвига бетона.

Подставляя (1) в (12) и приравнивая затем (12) к (11), получим:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \gamma_{xz} - \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{G} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right) + \gamma_{zx}^* - \frac{\partial w}{\partial x}.$$
(13)

Интегрирование равенства (13) по *z* даст:

$$u = \frac{1}{G} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Phi(z) + \int_{0}^{z} \gamma_{zx}^{*} dz - z \frac{\partial w}{\partial x} + f_{1}(x, y).$$
(14)

BUILDING

Будем рассматривать случай симметричного армирования, тогда срединная плоскость оказывается недеформируемой, и при z = 0 u = 0, откуда $f_1(x, y) = 0$.

Аналогично для перемещений ν можно записать:

$$v = \frac{1}{G} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Phi(z) - z \frac{\partial w}{\partial y} + \int_{0}^{z} \gamma_{zy}^{*} dz.$$
(15)

Деформации ε_x , ε_y и γ_{xy} определяются следующим образом:

$$\varepsilon_{x} = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^{2} w}{\partial x^{2}} + \frac{\Phi}{G} \frac{\partial^{2} \varphi}{\partial x^{2}} + \Gamma_{x};$$

$$\varepsilon_{y} = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^{2} w}{\partial y^{2}} + \frac{\Phi}{G} \frac{\partial^{2} \varphi}{\partial y^{2}} + \Gamma_{y};$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2\Phi}{G} \frac{\partial^{2} \varphi}{\partial x \partial y} - 2z \frac{\partial^{2} w}{\partial x \partial y} + \Gamma_{xy},$$
(16)

где
$$\Gamma_x = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^z \gamma_{zx}^* dz$$
; $\Gamma_y = \frac{\partial}{\partial y} \int_0^z \gamma_{zy}^* dz$; $\Gamma_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^z \gamma_{zy}^* dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^z \gamma_{zx}^* dz$.

Из (16) следует, что деформации, а, следовательно, и напряжения в пластине по толщине распределяются нелинейно.

Поскольку для касательных напряжений τ_{zx}
и τ_{zy} справедливы равенства:

$$\tau_{zx}(-z) = \tau_{zx}(z); \ \tau_{zy}(-z) = \tau_{zy}(z), \tag{17}$$

то функции Γ_x , Γ_y и Γ_{xy} также являются четными относительно z.

Связь между деформациями и напряжениями в бетоне в случае объемного напряженного состояния записывается в виде:

$$\varepsilon_{x} = \frac{1}{E_{b}} \left(\sigma_{bx} - \nu (\sigma_{by} + \sigma_{bz}) \right) + \varepsilon_{bx}^{*};$$

$$\varepsilon_{y} = \frac{1}{E_{b}} \left(\sigma_{by} - \nu (\sigma_{bx} + \sigma_{bz}) \right) + \varepsilon_{by}^{*};$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{bxy}}{G} + \gamma_{bxy}^{*}.$$
(18)

Выразим из (18) напряжения через деформации:

$$\sigma_{bx} = \frac{E_b}{1 - \nu^2} \left(\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y - \left(\varepsilon_{bx}^* + \nu \varepsilon_{by}^* \right) \right) + \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_{bz} =$$

$$= -\frac{E_b}{1 - \nu^2} \left(z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \varepsilon_{bx}^* + \nu \varepsilon_{by}^* - \left(\Gamma_x + \nu \Gamma_y \right) \right) +$$

$$+ \frac{2\Phi}{1 - \nu} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_{bz};$$
(19)

$$\begin{split} \sigma_{by} &= \frac{E_b}{1 - \nu^2} \left(\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x - \left(\varepsilon_{by}^* + \nu \varepsilon_{bx}^* \right) \right) + \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_{bz} = \\ &- \frac{E_b}{1 - \nu^2} \left(z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \varepsilon_{by}^* + \nu \varepsilon_{bx}^* - \left(\Gamma_y + \nu \Gamma_x \right) \right) + \\ &+ \frac{2\Phi}{1 - \nu} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) + \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_{bz}; \\ \tau_{bxy} &= G \left(\gamma_{xy} - \gamma_{bxy}^* \right) = \frac{E_b}{2(1 + \nu)} \left(-2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \Gamma_{xy} - \gamma_{bxy}^* \right) + 2\Phi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \end{split}$$

Изгибающие и крутящие моменты, воспринимаемые бетоном, записываются в виде:

$$M_{bx} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{bx} z dz = -D_b \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - M_{bx}^* +$$

$$+ \frac{2h^3}{15(1-v)} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + \frac{v}{1-v} \frac{qh^2}{10};$$

$$M_{by} = \int_{-h/2}^{1} \sigma_{by} z dz = -D_b \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - M_{by}^* +$$

$$+ \frac{2h^3}{15(1-v)} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + v \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) + \frac{v}{1-v} \frac{qh^2}{10};$$

$$H = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{bxy} z dz = -D_b (1-v) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{2h^3}{15} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - H_b^*,$$
(20)

где

$$M_{bx}^{*} = \frac{E_{b}}{1 - \nu^{2}} \int_{-h/2}^{h/2} \left(\varepsilon_{bx}^{*} + \nu \varepsilon_{by}^{*} - (\Gamma_{x} + \nu \Gamma_{y}) \right) z dz;$$

$$M_{by}^{*} = \frac{E_{b}}{1 - \nu^{2}} \int_{-h/2}^{h/2} \left(\varepsilon_{by}^{*} + \nu \varepsilon_{bx}^{*} - (\Gamma_{y} + \nu \Gamma_{x}) \right) z dz;$$

$$H_{b}^{*} = G \int_{-h/2}^{h/2} \left(-\Gamma_{xy} + \gamma_{bxy}^{*} \right) z dz; D_{b} = \frac{E_{b}h^{3}}{12(1 - \nu^{2})}.$$

строительство

BUILDING

Деформации арматуры определим из условия ее совместной работы с бетоном:

$$\varepsilon_{sx} = -z_{sx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\Phi(z_{sx})}{G} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \Gamma_x(z_{sx});$$

$$\varepsilon'_{sx} = z'_{sx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\Phi(-z'_{sx})}{G} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \Gamma_x(-z'_{sx}) = z'_{sx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\Phi(z_{sx})}{G} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \Gamma_x(z_{sx});$$

$$\varepsilon_{sy} = -z_{sy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\Phi(z_{sy})}{G} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \Gamma_y(z_{sy});$$

$$\varepsilon'_{sy} = z'_{sy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\Phi(z_{sy})}{G} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \Gamma_y(z_{sy}).$$
(21)

Изгибающие моменты, воспринимаемые арматурой, записываются в виде:

$$M_{sx} = \mu_{sx}hz_{sx}\sigma_{sx} - \mu'_{sx}hz'_{sx}\sigma'_{sx} = E_sh(\mu_{sx}z_{sx}\varepsilon_{sx} - \mu'_{sx}z'_{sx}\varepsilon'_{sx}) =$$

$$= -D_{sx}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\mu_{sx}hz_{sx}E_s\frac{\Phi(z_{sx})}{G}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2};$$

$$M_{sy} = \mu_{sy}hz_{sy}\sigma_{sy} - \mu'_{sy}hz'_{sy}\sigma'_{sy} = E_sh(\mu_{sy}z_{sy}\varepsilon_{sy} - \mu'_{sy}z'_{sy}\varepsilon'_{sy}) =$$

$$= -D_{sy}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\mu_{sy}hz_{sy}E_s\frac{\Phi(z_{sy})}{G}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2},$$
(22)

где $D_{sx} = 2\mu_{sx}hz_{sx}^2E_s, D_{sy} = 2\mu_{sy}hz_{sy}^2E_s.$

Складывая (22) и (20), получим:

$$M_{x} = M_{bx} + M_{sx} = -D_{1} \frac{\partial^{2} w}{\partial x^{2}} - D^{*} \frac{\partial^{2} w}{\partial y^{2}} - M_{bx}^{*} + \frac{\partial^{2} \varphi}{\partial x^{2}} (\frac{2h^{3}}{15(1-\nu)} + 2\mu_{sx}hz_{sx}\frac{E_{s}}{G}\Phi(z_{sx})) + \frac{2h^{3}}{15(1-\nu)}\nu\frac{\partial^{2} \varphi}{\partial y^{2}} + \frac{\nu}{1-\nu}\frac{qh^{2}}{10}.$$

$$M_{y} = M_{by} + M_{sy} = -D_{2}\frac{\partial^{2} w}{\partial y^{2}} - D^{*}\frac{\partial^{2} w}{\partial x^{2}} - M_{by}^{*} + \frac{\partial^{2} \varphi}{\partial y^{2}} (\frac{2h^{3}}{15(1-\nu)} + 2\mu_{sy}hz_{sy}\frac{E_{s}}{G}\Phi(z_{sy})) + \frac{2h^{3}}{15(1-\nu)}\nu\frac{\partial^{2} \varphi}{\partial x^{2}} + \frac{\nu}{1-\nu}\frac{qh^{2}}{10},$$
(23)

где $D_1 = D_b + D_{sx}, D_2 = D_b + D_{sy}, D^* = vD_b.$

Подставляя выражения для изгибающих и крутящих моментов в уравнение равновесия, получим второе разрешающее уравнение:

$$D_{1}\frac{\partial^{4}w}{\partial x^{4}} + 2D_{b}\frac{\partial^{4}w}{\partial x^{2}\partial y^{2}} + D_{2}\frac{\partial^{4}w}{\partial y^{4}} = q + \frac{\nu h^{2}}{(1-\nu)10}\nabla^{2}q - \left(\frac{\partial^{2}M_{bx}^{*}}{\partial x^{2}} + 2\frac{\partial^{2}H_{b}^{*}}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^{2}M_{by}^{*}}{\partial y^{2}}\right) + \frac{\partial^{4}\varphi}{\partial x^{4}}\left(\frac{2h^{3}}{15(1-\nu)} + 2\mu_{sx}hz_{sx}\frac{E_{s}}{G}\Phi(z_{sx})\right) + \frac{\partial^{4}\varphi}{15(1-\nu)}\left(\frac{2h^{3}}{15(1-\nu)} + 2\mu_{sy}hz_{sy}\frac{E_{s}}{G}\Phi(z_{sy})\right) + \frac{4h^{3}}{15(1-\nu)}\frac{\partial^{4}\varphi}{\partial x^{2}\partial y^{2}}.$$

$$(24)$$

Системные технологии 4 (Nº49) 2023

Таким образом, задача расчета толстой железобетонной плиты свелась к системе из двух дифференциальных уравнений (9) и (24).

Выводы

Был выполнен расчет прямоугольных шарнирно опертой по контуру плиты размерами a = 2.5 м, b = 3 м при q = 100 кПа. Модуль упругости бетона $E_b(\tau_0) = 3 \cdot 10^4$ МПа, коэффициент Пуассона v = 0.2, старение бетона учитывалось. Модуль упругости стали $E_s = 2 \cdot 10^5$ МПа, коэффициенты армирования $\mu_{sx} = \mu'_{sx} = 0.005$, $\mu_{sy} = \mu'_{sy} = 0.006$. На **рис. 1** приведен график роста прогиба при h = 30 см, $z_{sx} = z'_{sx} = 12$ см, $z_{sy} = z'_{sy} = 10.5$ см. Отношение h/a для данной плиты составляет 1/6.25. Штриховой линии соответствует решение без учета деформаций сдвига.

Разница между перемещениями, полученными по теории Кирхгофа-Лява и по уточненной теории составляет 6.12% в начале процесса ползучести и 2.28% при $t \rightarrow \infty$.



Рис. 1. График роста прогиба при *h* = 30 см

По уточненной теории напряжения в бетоне, как и перемещения, оказываются выше, чем при использовании гипотезы прямых нормалей. Разница в начале процесса ползучести составляет 1.8%, а при $t \to \infty - 1.36\%$.

Библиографический список

1. Гольденвейзер, А. Л. Теория упругих тонких оболочек / А. Л. Гольденвейзер. — М.: Наука, 1976. — 512 с.

2. *Ковалев, В. А.* Полная статико-геометрическая аналогия теории тонких оболочек / В. А. Ковалев, В. А. Козлов // Вестник Самарского государственного университета. — 2007. — №. 9-1. — С. 188 – 194.

3. *Григолюк, Э. И.* Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек / Э. И. Григолюк, И. Т. Селезов. — М.: ВИНИТИ, 1973. — 272 с.

4. *Палий*, *О. М.* Справочник по строительной механике корабля. Часть 2. Пластины. Теория пластичности и ползучести. Численные методы. / *О. М. Палий*. — Л.: Судостроение, 1982. — 464 с.

5. *Тарнопольский, Ю. М.* Особенности расчета деталей из армированных пластиков / Ю. М. Тарнопольский, А. В. Розе. — Рига: Зинатне, 1969. — 274 с.

6. Тимошенко, С. П. Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. — М.: Наука, 1966. — 636 с.

7. Василевич, Ю. В. Моделирование напряженного состояния в осесимметричной оболочке с учетом анизотропных свойств композиционного материала / Ю. В. Василевич [идр.] // Теоретическая и прикладная механика : международный научно-технический сборник / Белорусский национальный технический университет ; редкол.: Ю. В. Василевич (пред. редкол., гл. ред.). — Минск: БНТУ, 2020. — Вып. 35. — С. 30 – 36.

8. *Фирсанов, В. В.* Исследование продольно подкрепленных цилиндрических оболочек под действием локальной нагрузки по уточненной теории / В. В. *Фирсанов, В. А. Хиеу* // Труды МАИ. — 2018. — №. 102. — С. 7.

9. *Амбарцумян, С. А.* Теория анизотропных пластин: Прочность, устойчивость и колебания / *С. А. Амбарцумян.* — М.: Наука, 1987. — 360 с.

10. *Амбарцумян С. А.* Мембранная микрополярная теория оболочек, изготовленных из разномодульного материала // Национальная академия наук Армении. Доклады. — 2013. — Т. 113. — №. 4. — С. 369–377.

INFLUENCE OF SHEAR DEFORMATIONS ON THE STRESS-STRAIN STATE OF REINFORCED CONCRETE SLABS

M. Sh. Gatiev^{*/**} N. A. Ayubov^{*} S. V. Klyuev^{***} S. V. Litvinov^{****}

* Kh. Ibragimov Complex Institute of the Russian Academy of Sciences, Grozny

** Ingush State University, Magas

*** Belgorod State Technological University named after. V.G. Shukhov, Belgorod

**** Don State Technical University, Rostov-on-Don

Abstract

The article provides the derivation of the basic equations for determining the stress-strain state of reinforced concrete slabs under the influence of a uniformly distributed load. The difference from existing similar studies is the con-

The Keywords

Concrete creep, shear stress, plane stress state, reinforced concrete slabs, numerical methods sideration of the uneven distribution of tangential stresses across the thickness of the slab, in contrast to the most common option — uniform distribution. Finally, the problem of calculating a thick reinforced concrete slab is reduced to a system of two differential equations. The results of solving a model problem based on the equations of a viscoelastic model of hereditary aging are presented.

Date of receipt in edition 12.10.2023 Date of acceptance for printing 15.10.2023

Ссылка для цитирования:

М. Ш. Гатиев, Н. А. Аюбов, С. В. Клюев, С. В. Литвинов. Влияние деформаций сдвига на напряженно-деформированное состояние железобетонных плит. — Системные технологии. — 2023. — № 4 (49). — С. 100–108.

